b) $\lim_{t \to +\infty} (1+t)\,e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} (t\,e^{-t} + e^{-t}) = 0$

$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{e^t} + \frac{1}{\frac{e^t}{t}}\right) = 0$ ($\frac{e^t}{t} \to +\infty$)

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)e^{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} (1+\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$ on pose $t = \frac{1}{x}$

$= \lim_{t \to +\infty} (1+t)\,e^{-t} = 0$

d'ou f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

c) pour $x \in]0,+\infty[$ on a :

$f'(x) = (\frac{x^2+x+1}{x^2})\, e^{-\frac{1}{x}} > 0$

d'où f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

(de la forme : $(+\infty) \times (1)$)

e) f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

Comme $2 \in [0,+\infty[$ alors il existe un unique réel α ds $[0,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2$

$f([2,3]) = [\frac{3}{\sqrt{e}}, \frac{4}{\sqrt[3]{e}}] = I$

$2 \in I$ donc $\alpha \in [2,3]$

2) $\varphi(t) = 1 - (1+t)\,e^{-t}$

a) $\varphi'(t) = t\,e^{-t}$ (enoncé à rectifier ds M-S)

b) montrons que : $0 \le \varphi(t) \le \frac{t^2}{2}$ pour $t>0$

pour $u \in [0,t]$ on a

$0 \le \varphi'(u) = u\,e^{-u} \le u$

D'où $0 \le \int_0^t \varphi'(u)\,du \le \int_0^t u.du$

$\Rightarrow 0 \le [\,\varphi'(u)\,]_0^t \le [\,\frac{u^2}{2}\,]_0^t$

$\Rightarrow 0 \le \varphi(t) \le \frac{t^2}{2}$

3) pour $x > 0$

$x - f(x) = x - (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}$

$= x\,[1 - (1+\frac{1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}] = x \cdot \varphi(\frac{1}{x})$

d'après 2) b) et pour $t = \frac{1}{x}$

$0 \le \varphi(\frac{1}{x}) \le \frac{1}{2x^2}$

$\Rightarrow 0 \le x..\varphi(\frac{1}{x}) \le \frac{1}{2x}$

$\Rightarrow 0 \le x - f(x) \le \frac{1}{2x}$

* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$

d'où * $\lim_{x \to +\infty} x - f(x) = 0$

ce qui prouve que la droite D d'équation : $y = x$ est une asymptote à (ξ) au voisinage de $+\infty$

et comme $x - f(x) \ge 0$ pour tout $x \ge 0$ donc (ξ) au dessus de D